5.1 Das kosmologische Postulat

Kein Modell des Kosmos kommt ohne Grundannahmen aus, welche axiomatischen Charakter haben. Für die Kosmologie spielt das auf Kopernikus zurückgehende *kosmologische Postulat* eine große Rolle. Es besagt, dass die lokal geltenden physikalischen Gesetze sich nicht wesentlich von denen unterscheiden sollten, die an anderen Orten im Universum gelten. Dem liegt die Vorstellung zugrunde, dass wir als Beobachter in keiner Weise ausgezeichnet sind. Dieses Postulat lässt so formuliert eine zeitliche Entwicklung des Universums zu. In seiner *vollständigen* Formulierung würde es besagen, dass zu jedem Zeitpunkt und von jedem Standpunkt aus das Universum exakt gleich auszusehen habe – diese Formulierung führt direkt zu einer stationären Kosmologie.

5.2 Beobachtungsbefunde

Die folgenden, teilweise selbstverständlich erscheinenden Befunde müssen von jeder veritablen Kosmologie erklärt werden können.

5.2.1 Dunkler Nachthimmel (Olbers' Paradoxon)

In einem unbegrenzten, homogen mit identischen Sternen erfüllten Raum ist die Zahl der Sterne in einer auf den Beobachter zentrierten Kugelschale mit Radius r und Dicke dr proportional zu $4\pi r^2\, dr$. Das von ihnen ausgehende Licht erreicht den Beobachter um einen Faktor $1/r^2$ abgeschwächt. Integriert man alle Anteile bis ins Unendliche, so divergiert das Ergebnis. In der Praxis trifft jeder Sehstrahl früher oder später auf die Oberfläche eines Sterns, alle dahinter liegenden Sterne wären verdeckt. In diesem Fall müsste der Himmel in jeder Richtung so hell wie die Sonne erscheinen.

Das Argument gilt auch für inhomogene Sternverteilungen – z. B. Organisation in Galaxien – solange deren Verteilung im Großen homogen ist. Auch ein gekrümmter Raum ändert nichts an dem Ergebnis.

Ein homogen verteiltes intergalaktisches Medium könnte einen mit der Entfernung wachsenden Anteil absorbieren, und wäre ab einer gewissen Entfernung optisch dick. Es würde nach hinreichend langer Zeit in ein thermodynamisches Gleichgewicht mit den Sternen treten und somit genauso hell strahlen wie sie.

Für die Beobachtung eines dunklen Nachthimmels (*Olbers' Paradox*) gibt es drei mögliche Erklärungen:

- Das Universum ist sehr jung, Sterne existieren noch nicht lange genug als dass uns ihr Licht aus großen Entfernungen hätte erreichen können.
- Die physikalischen Konstanten sind eine Funktion der Zeit und haben erst in der jüngeren Vergangenheit Werte angenommen, welche Sterne hell leuchten lassen.
- Sterne in großen Entfernungen haben große Expansionsgeschwindigkeiten, ihr Licht ist zu sehr rotverschoben und verdünnt.

Offenbar sind Sterne zu selten ($N = 10^{10}$ Mpc^{-3}) und scheinen erst seit $T = 10^{10}$ Jahren. Berechnet man aus der Oberfläche eines typischen Sterns ($\sigma = 10^{-26}$ Mpc^2) und seiner Lebensdauer das Volumen, welches er mit Oberflächenenergiedichte hätte füllen können (σcT), so erhält man aus dem dem Stern zur Verfügung stehenden Volumen N^{-1} einen Verdünnungsfaktor von $3\cdot 10^{-11}$. Die auf die Expansion zurückzuführenden Effekte sind gering.

Der dunkle Nachthimmel ist ein Hinweis auf die Endlichkeit des Universums – der geringen Dichte an normaler Materie, ihrem geringen Alter und ihrer begrenzten Energievorräte.

5.2.2 Verteilung der extragalaktischen Materie

Neuere Studien der großräumigen Verteilung von Galaxien zeigen eine ausgeprägte Strukturierung auf Skalen bis zu 50 Mpc („Schaum“), welche von Schichten mit hoher Konzentration von Galaxien und auffälligen Hohlräumen sehr geringer Galaxiendichte geprägt ist. Diese Beobachtungen beruhen auf vollständige Durchmusterungen der Radialgeschwindigkeiten von Galaxien bis zu einer Grenzgröße, welche die Reichweite limitiert. Eine Durchmusterung des *Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics* in den Neunziger Jahren hatte eine Reichweite von etwa 250 Mpc, der moderne *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) reicht bis etwa 1 Gpc.

Im Großen, d. h. für Skalen jenseits von 100 Mpc wird die Verteilung der Materie im Universum homogener und isotroper. Neben den Radialgeschwindigkeits-Durchmusterungen tragen zu diesem Befund Statistiken der Verteilung des intergalaktischen Wasserstoffs, von Gravitationslinsen, Häufigkeiten von Galaxienhaufen sowie der Temperaturverteilung des kosmischen Strahlungshintergrundes bei.

Die Verteilung der scheinbaren Helligkeiten bei isotroper Verteilung sollte proportional zu $10^{0.6m}$ sein. Dies trifft für die Verteilung von Galaxien und extragalaktischer Radioquellen zu. Aus der Verteilung von Quasaren ist zu entnehmen, dass diese im früheren Universum entweder viel heller oder viel häufiger waren als heute. Offensichtlich gibt es hier Anzeichen für eine Entwicklung des Universums mit der Zeit.

5.2.3 Hubble'sches Gesetz

Die Verschiebung der Spektrallinien extragalaktischer Quellen zu längeren Wellenlängen wird als Doppler-Effekt gedeutet. Man definiert die *Rotverschiebung* mit

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \ , \qquad (5.01)$$

wobei λ die gemessene und λ_0 die Ruhewellenlänge ist. Das Hubble'sche Gesetz ergibt sich nun mit

$$z = \frac{H_0}{c} r \qquad (5.02)$$

mit der Hubblekonstanten H_0 (Einheiten [km s^{-1} Mpc^{-1}]). Für kleine Radialgeschwindigkeiten $V_R << c$ ergibt sich das Hubblegesetz in der bekanten Form $V_R = H_0 r$.

Für eine Klasse von Objekten gleicher absoluter Helligkeit M_0 (*Standardkerzen*) gilt ein linearer Zusammenhang zwischen dem Logarithmus der Rotverschiebung und der scheinbaren Helligkeit,

$$m = M_0 + 5 \lg\left(\frac{cz}{H \cdot 10 pc}\right) = 5 \lg z + C \ . \qquad (5.03)$$

Dieses Gesetz ist bis $z \approx 1$ recht gut erfüllt. Für größere Rotverschiebung gibt es keine geeigneten Standardkerzen. Die inverse Hubblekonstante H^{-1} ist von der Dimension Zeit. Sie gibt eine Abschätzung des Weltalters.

Die erste Bestimmung von H_0 durch Hubble ergab 536±50 [km s^{-1} Mpc^{-1}], der beste heutige Wert ist 71±3 [km s^{-1} Mpc^{-1}].

Die zurzeit genaueste Schätzung des Weltalters ist T_0 = 13.7±0.2 Gy. Zu diesem Zeitpunkt muss das Universum auf ein sehr kleines Volumen konzentriert gewesen sein.

5.2.4 Kosmische Hintergrundstrahlung

Ein wesentlicher Stützpfeiler moderner kosmologischer Theorien ist die Entdeckung der *Mikrowellen-Hintergrundstrahlung* durch Penzias und Wilson im Jahre 1965. Diese schon 1940 von Gamov vorhergesagte, isotrope Strahlung hat das Spektrum eines schwarzen Körpers mit einer Temperatur von 2.7 K mit bemerkenswert hoher Präzision.

Die Ursache der Hintergrundstrahlung ist eine frühe, heiße Phase kurz nach der Entstehung des Universums, in welcher sich das Strahlungsfeld von der Materie bei einer Temperatur von 3000 K (Rekombination von H) entkoppelte. Die Expansion führte zu einer Abkühlung des Feldes zu der heutigen Temperatur.

Moderne, hochpräzise Messungen der Hintergrundstrahlung durch die Satelliten *Cosmic Background Explorer* (COBE) zu Beginn der Neunziger und *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) fördert Anisotropien auf sehr kleinem Niveau hervor. Inhomogenitäten ergeben sich erst bei relativen Fluktuationen von 10^{-3}. Die wesentliche Komponente ist ein Dipol - dessen Ursache ist die Relativbewegung des Beobachters zum Rest des Universums (d. h., die Überlagerung der Eigenbewegungen der Sonne, des „lokalen Ruhesystems", der Milchstraße und der lokalen Gruppe).

Bei relativen Fluktuationen von $\Delta T/T = 10^{-5}$ zeigen sich Fluktuationen, die dem primordialen Universum zugeschrieben werden und welche zwischen konkurrierenden kosmologischen Theorien unterscheiden helfen.

5.2.5 Intrinsische Indikatoren für das Alter des Universums

Die Alter der Milchstraße, der Kugelsternhaufen und der ältesten Sterne kommen, nach unabhängigen Abschätzungen, dem Hubble-Alter sehr nahe. Dies ist eine starke Stütze für die Interpretation der Rotverschiebung als kosmologischer Expansionseffekt.

Verhältnisse der Häufigkeiten von Radionukliden:

z. B. Uran: λ_{238U} = ln 2 / (4.46 10^9 Jahre), λ_{235U} = ln 2 / (0.7038 10^9 Jahre)

$$K(t) = \frac{\left[{}^{235}U\right]}{\left[{}^{238}U\right]} = K_0 \exp\left(\left(\lambda_{238U} - \lambda_{235U}\right) t\right)$$

Das primordiale Häufigkeitsverhältnis K_0 ist 1.3±0.13. Aus den Häufigkeiten der Uranisotope in Kugelsternhaufen ergibt sich ein geschätztes Alter von 13.2 10^9 Jahren, af jeden Fall mehr als 11.2 10^9 Jahren.

Farben elliptischer Galaxien in hellen Haufen:

Diese Farben hängen nur von der Entwicklungsgeschichte ihrer Sterne ab. Durch Populationssynthese kann man ihr Alter abschätzen. Ergebnis: [$13.4^{+1.4}_{-1.0}$] 10^9 Jahre.

Farb-Helligkeitsdiagramme von Kugelhaufen:

Die Anpassung von Sternentwicklungsrechnungen an die FHDs von Kugelsternhaufen ergeben Alter von etwa 12 10^9 Jahren.

5.2.6 Häufigkeiten leichter Elemente

Die relative Massen-Häufigkeit des Heliums in den ältesten Objekten beträgt 25%. Dieser Wert hängt empfindlich von der Temperatur des frühen Universums ab. Standardmodelle des Urknalls reproduzieren ihn sehr gut. Ähnliche Überlegungen gelten für die Häufigkeiten von Elementarteilchen und die offensichtliche Abwesenheit von Antimaterie.

5.3 Die Zusammensetzung des Universums

Die folgende Tabelle gibt die bekannten und vermuteten Bestandteile des Universums aus heutiger Sicht wieder. Massen- bzw. Energiedichten sind normiert auf eine später näher erläuterte *kritische Dichte* ρ_c mit einem auf eine Hubble-Konstante

$$H_0 = 70 \text{ [km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}] \tag{5.04}$$

bezogenen Wert von

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 0.92 \cdot 10^{-26} \text{ [kg m}^{-3}] \tag{5.05}$$

Verhältnisse von Dichten der Okkupanten X zur kritischen Dichte werden mit der dimensionslosen Zahl Ω angegeben:

$$\Omega_X = \frac{\rho_X}{\rho_c} \tag{5.06}$$

Die wesentlichen Komponenten sind „normale“, leuchtende Materie („baryonische Materie“), welche nur wenige Prozent der gesamten Energiedichte des Universums auszumachen scheinen. Der Großteil der Materie existiert als „kalte dunkle Materie“, über deren Natur nichts bekannt ist. Der größte Teil der Energiedichte entstammt einer so genannten „Vakuumenergie“, der definitionsgemäß keine Teilchen zugeordnet sind. Sie hängt zusammen mit der kosmologischen Konstante Λ, für welche gilt

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} \approx \frac{\Lambda}{3H_0^2} \approx 0.7, \tag{5.07}$$

daraus ergibt sich $\rho_\Lambda \approx 3 \cdot 10^9 \text{ [eV m}^{-3}]$

Mit Ausnahme der direkt beobachteten Photonen sind die angegebenen Teilchenzahlen eher provisorischer Natur und mit Vorsicht zu genießen.

Spezies	**Teilchenzahl n_i [m^{-3}]**	**Relative Dichte Ω_i**
Photonen der kosm. Hintergrundstrahlung	$n_\gamma = (4.11 \pm 0.02) \cdot 10^8$	$\Omega_\gamma = 5.06 \cdot 10^{-5}$
Neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ)	$n_\nu = \frac{3}{11} n_\gamma$ (pro Spezies)	$\Omega_\nu > 4 \cdot 10^{-4}$
Baryonen und Elektronen	$n_b \approx 0.2 \pm 0.05$	$\Omega_b \approx 0.04 \pm 0.01$
Dunkle kalte Materie (CDM)	?	$\Omega_{CDM} \approx 0.3 \pm 0.1$
„Vakuumenergie“	0	$\Omega_\Lambda \approx 0.7 \pm 0.1$
Summe		$\Omega_T = \Omega_b + \Omega_{CDM} + \Omega_\Lambda \approx 1.0 \pm 0.1$

5.4 Homogene und isotrope Universen

5.4.1 Skalenfaktor

Lösungen für Modelle von homogenen und isotropen Universen können zeitabhängig sein. Es ist nützlich, diese Zeitabhängigkeit in Form eines *Skalenfaktors a(t)*, welcher proportional zu den extragalaktischen Distanzen ist, darzustellen.

Natürliche Einheiten für Skalenfaktoren sind die

Hubble-Zeit $$t_H = H_0^{-1} = 1.4 \cdot 10^{10}\, yr \qquad (5.04)$$

Hubble-Distanz $$d_H = c\, t_H = c\, H_0^{-1} = 4.3\, Gpc \qquad (5.05)$$

Die logarithmische Ableitung des Skalenfaktors zur heutigen Zeit ergibt den (heutigen; $t = t_0$) Wert der Hubble-Konstante:

$$\left[\frac{\dot{a}}{a}\right]_{t_0} = H_0 \qquad (5.06)$$

Der heutige Wert von *a(t)* sei $a_0 = a(t_0)$. Wäre die Zahl der Galaxien konstant, so würde ihre Dichte $n_{gal}(t)$ proportional zur dritten Potenz von *a(t)* abnehmen,

$$a(t) = a_0 \sqrt[3]{\left(\frac{n_{gal}(t_0)}{n_{gal}(t)}\right)} \quad . \qquad (5.07)$$

Statt der Galaxiendichte kann man die (strikt erhaltene) mittlere Baryonendichte nehmen.

Der Einfachheit halber führt man den auf den heutigen Wert bezogenen, *reduzierten Skalenfaktor* ein:

$$\hat{a}(t) = \frac{a(t)}{a_0} \qquad (5.08)$$

5.4.2 Mitbewegtes Koordinatensystem

Vernachlässigt man die Eigenbewegung von Galaxien, so kann man sie als Fixpunke im Universum mit Koordinate χ betrachten (mitbewegtes Koordinatensystem, *comoving coordinates*). Der Abstand zwischen zwei Galaxien i, j ergibt sich dann mit

$$\vec{R}_j - \vec{R}_i = a(t)(\vec{X}_j - \vec{X}_i) \tag{5.09}$$

5.4.3 Newtonsche Kosmologie

Schon die Anwendung des Newtonschen Gravitationsgesetzes auf eine homogene, unendlich ausgedehnte Massenverteilung führt zu einem nichtstationären Universum.

Wir betrachten einen willkürlich gewählten Bereich in Form einer Kugel mit Radius *R(t)*, die homogen mit Masse der Dichte ρ(t) erfüllt ist. Eine Galaxie auf der Kugeloberfläche mit der Masse *m* würde von der Kugel mit der Masse $M = \frac{4\pi}{3} R^3(t)\rho(t)$ angezogen; der homogene „Rest" des Universums würde keine Kraft ausüben.

Die potentielle Energie der Galaxie ist

$$U = -G\frac{Mm}{R(t)} = -\frac{4\pi}{3} G\, m\, \rho(t) R^2(t) \tag{5.10}$$

Die Beschleunigung aufgrund der Gravitationskraft ist

$$\ddot{R}(t) = -G\frac{M}{R^2(t)} = -\frac{4\pi}{3} G\, \rho(t) R(t) \quad . \tag{5.11}$$

Für ein Universum, welches dem Hubble'schen Gesetz unterliegt, ist die heutige kinetische Energie der Galaxie

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m H_0^2 R^2(t_0) \tag{5.12}$$

Die Gesamtenergie zur heutigen Zeit ergibt sich mit

$$E = T+U = \frac{1}{2} m H_0^2 R^2(t_0) - \frac{4\pi}{3} G m \rho(t_0) R^2(t_0) = m R^2(t_0) \left[\frac{1}{2} H_0^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho(t_0) \right] \tag{5.13}$$

Gl. (5.13) enthält in der eckigen Klammer einen Term, der unabhängig von den Spezifika unserers willkürlichen Beispiels ist. Wird die Gesamtenergie negativ, dann reicht die Dichte aus, die Expansionsbewegung zum Stillstand zu bringen und umzukehren („geschlossenes Universum“), ist sie positiv, dan expandiert das Universum für immer („offenes Universum“). Die Grenze ist erreicht, wenn

$$\frac{1}{2} H_0^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho(t_0) = 0 \rightarrow \rho(t_0) = \frac{3 H_0^2}{8\pi G} = \rho_c \tag{5.14}$$

die heutige Dichte gleich der *kritischen Dichte* ρ_c ist.

Die Zeitabhängigkeit der Abstände und der Dichte kann man mit Hilfe des reduzierten Skalenfaktors ausdrücken:

$$R(t) = R(t_0)\hat{a}(t), \quad \rho(t) = \frac{\rho(t_0)}{\hat{a}^3(t)} \tag{5.15}$$

Ersetzen wir R und ρ in (5.11) durch (5.12), so ergibt sich eine Differentialgleichung für den reduzierten Skalenfaktor:

$$\ddot{\hat{a}} = -\frac{4\pi}{3} G \frac{\rho(t_0)}{\hat{a}^2} \tag{5.16}$$

Verwenden wir die Identität $\ddot{\hat{a}} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\hat{a}} \dot{\hat{a}}^2$, dann erhalten wir

$$d\dot{\hat{a}}^2 = -\frac{8\pi}{3} G \rho(t_0) \frac{d\hat{a}}{\hat{a}^2} \tag{5.17}$$

Durch Integration erhält man

$$\dot{\hat{a}}^2(t)-\dot{\hat{a}}^2(t_0) = \frac{8\pi}{3}G\rho(t_0)\left(\hat{a}^{-1}-1\right) \qquad (5.18)$$

Ersetzen wir die heutige Dichte durch den dimensionslosen Parameter $\Omega_0 = \frac{\rho(t_0)}{\rho_c}$ sowie $\dot{\hat{a}}(t_0)$ durch H_0, dann wird (5.18) unter Verwendung von (5.14)

$$\boxed{\dot{\hat{a}}^2 = H_0^2\left(\frac{\Omega_0}{\hat{a}}-\Omega_0+1\right)} \qquad (5.19)$$

Gleichung (5.19) ist die **Friedmann-.Gleichung** für den Spezialfall eines von nichtrelativistischer Materie dominierten Universums $(\Omega_T=\Omega_M=\Omega_0)$. Sie beschreibt die **zeitliche Entwicklung des Skalenfaktors**. Gl. (5.19) wird häufig in der Form der zeitlichen Änderung des **Hubble-Parameters** $H(t)=\dot{a}/a$ angegeben:

$$\boxed{\left[\frac{\dot{a}}{a}\right]^2 = H_0^2\left(\frac{\Omega_M}{\hat{a}^3}+\frac{1-\Omega_T}{\hat{a}^2}\right)} \qquad (5.20)$$

Die Angabe von H_0 und Ω_0 reicht zur vollständigen Charakterisierung des Weltmodells aus.

Ein stationäres Modell gibt es nicht, alle Modelle erfordern einen Zeitpunkt unendlich hoher Dichte. Ist die Gesamtenergie *E* größer als 0, so wird das Modell monoton expandieren, für E < *0* wird es periodisch oszillieren mit Phasen dere Expansion (Rotverschiebung) und der Kontraktion (Blauverschiebung).